ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

дата 06.12.23

Тема «Численное дифференцирование»

Теоретические сведения

В ряде случаев возникает необходимость найти производные от функции $y = f(x)$, заданной таблично. Возможно также, что непосредственное дифференцирование функции оказывается слишком сложным в силу особенностей аналитического задания функции. В этих случаях прибегают к ***приближенному дифференцированию***.

Для вывода формулы приближенного дифференцирования данную функцию $f(x)$ заменяют интерполяционным полиномом $P(x)$, и полагают: $f'(x) = P'(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Погрешность интерполирующей функции $P(x)$ определяют разностью:

$R(x) = f(x) - P(x)$,

и тогда погрешность производной $P'(x)$ выражается формулой:

$r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x)$

Получим формулы приближенного дифференцирования, основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона.

Пусть функция $y = f(x)$ задана в равноотстоящих точках x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ отрезка $[a,b]$. Функцию y приближенно заменим интерполяционным полиномом Ньютона:

$$y = y_o + q\Delta y_o + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_o + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_o + \ldots \qquad (1)$$

Здесь $q = \dfrac{x - x_o}{h}$, $h = x_{i+1} - x_i$ - шаг интерполяции,

Δy_o -первая конечная разность: $\Delta y_o = \Delta f(x_o) = f(x_o + h) - f(x_o)$.

$\Delta^2 y_o$ - вторая конечная разность: $\Delta^2 y_o = \Delta(\Delta y_o)$

$\Delta^n y_o$ - конечные разности высших порядков: $\Delta^n y_o = \Delta(\Delta^{n-1} y_o)$

Производя перемножение в формуле (1) и раскрывая факториал, получаем:

$$y = y_o + q\Delta y_o + \frac{q^2 - q}{1\cdot 2}\Delta^2 y_o + \frac{q^3 - 3q^2 + q}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_o + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 y_o + \ldots$$

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dq}\cdot\dfrac{dq}{dx} = \dfrac{1}{h}\dfrac{dy}{dq}$, получаем формулу приближенного дифференцирования:

$$y' = \frac{1}{h}\left(\Delta y_o + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3 - 9q^2 + 11q - 3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right) \qquad (2)$$

Аналогично для второй производной:

$$y'' = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2 - 18q + 11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right)$$

Таким же способом можно вычислить производную любого порядка.

Если функция задана таблично, и значение производной нужно вычислить в узловых точках x_i, то каждое табличное значение принимают за начальное $x = x_o$ и тогда

$q = 0$. Формулы численного дифференцирования существенно упрощаются. Полагая в формуле (2) $q = 0$, получаем:

$$y' = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \ldots\right) \tag{3}$$

Для второй производной:

$$y'' = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \ldots\right)$$

Опустим теоретический вывод и приведем конечную формулу для вычисления погрешности производной:

$$R'(x_o) \approx \frac{(-1)^k \Delta^{k+1} y_0}{h \cdot (k+1)} \tag{4}$$

где k - это максимальный порядок конечной разности, входящей в интерполяционный полином Ньютона $P(x)$.

В формулы численного дифференцирования входят конечные разности разных порядков функции

$y = f(x)$. Рассмотрим подробно на примере вычисление конечных разностей некоторой функции.

Пример 1. Построить конечные разности для функции $P(x)=x^3$, полагая шаг равным единице: h=1.

Решение:

Первая конечная разность функции $P(x)$:

$\Delta P(x) = P(x + H)\text{-}P(x);$

$\Delta P(x) = (x+1)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x+1 - x^3 = 3x^2 + 3x+1.$

Вторая конечная разность функции $P(x)$:

$\Delta^2 P(x) = \Delta(\Delta P(x));$

$\Delta^2 P(x) = (3(x + 1)^2 + 3(x +1) +1) - (3x^2 + 3x +1) = 6x + 6.$

Конечная разность третьего порядка:

$\Delta^3 P(x) = \Delta(\Delta^2 P(x));$

$\Delta^3 P(x) = (6(x + 1) + 6) - (6x + 6) = 6.$

Конечная разность четвертого порядка:

$\Delta^4 P(x) = \Delta(\Delta^3 P > (x));$

$\Delta^4 P(x) = 6 - 6 = 0.$

Все конечные разности порядка выше четвертого также равны нулю: $\Delta^n P(x) = 0$.

Вычисленные конечные разности различных порядков располагают в форме таблицы 1, которую называют ***горизонтальной таблицей разностей или просто таблицей извечных, разностей.***

Таблица 1

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	...
0	x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	…
1	x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	…
2	x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	…
…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…

Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru